

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

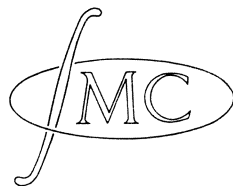
AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TN 26

De warmteoverdracht in een windketel

door

C. Hoede



november 1962

§ 1. Inleiding.

Om in een buizensysteem, waardoor water gepompt wordt, het catastrofale verschijnsel van de waterslag te voorkomen, is het nodig zogenaamde windketels aan dit buizensysteem aan te sluiten. Deze windketels zijn stalen vaten, die gevuld zijn met water, waarboven zich een luchtbel bevindt. Zodra de pompdruk in het buizensysteem wegvalt, wordt vanuit de windketels water aan het systeem toegevoerd, waardoor waterslag voorkomen kan worden.

Indien het water uit de windketels geperst wordt, zal de luchtbel boven het water expanderen, waarbij warmte aan de luchtbel toegevoerd wordt. Voor het bouwen van windketels is het van belang iets naders over deze warmteoverdracht te weten. In deze notitie wordt een methode gegeven, met behulp waarvan de warmteoverdracht in een bestaande ketel bepaald kan worden. De kennis die hierdoor verkregen wordt, kan toegepast worden bij berekeningen met betrekking tot nog te bouwen windketels.

De warmtetoevoer vindt in eerste instantie op twee manieren plaats.

1e. De verzadigde waterdamp zal bij de temperatuurdaling van de luchtbel, die optreedt tengevolge van de expansie, ten dele condenseren, waardoor er warmte vrijkomt.

2e. Tengevolge van het temperatuursverschil tussen gas en wand, zal er een warmteoverdracht van de wand naar het gas plaatsvinden.

De warmtetoevoer dQ aan een gram molecuul lucht in het tijdsinterval dt zal dus bestaan uit twee termen, die we met dQ_{damp} en dQ_{wand} aangeven.

De term dQ_{damp} wordt gegeven door de uitdrukking:

$$dQ_{\text{damp}} = - \frac{d(KVo)}{dt} dt, \quad (1.1)$$

waarbij K de verdampingswarmte van water is, V het volume van een gram-molecuul lucht en σ de dampdichtheid van de waterdamp.

De tweede term dQ_{wand} wordt gegeven door de formule:

$$dQ_{\text{wand}} = F(T, T_0) dt, \quad (1.2)$$

waarbij F de coëfficiënt van de warmteoverdracht voorstelt, welke een functie is van o.a. de absolute temperatuur T van de lucht en de absolute temperatuur T_0 van de wand.

Aldus krijgen we de relatie:

$$dQ = - \frac{d(KV\sigma)}{dt} dt + F(T, T_0) dt. \quad (1.3)$$

Er zij op gewezen, dat $F(T, T_0)$ niet nader gespecificeerd wordt. Deze functie representeert alle mogelijke vormen van warmteoverdracht, waaronder warmteconvectie naast bijv. ook diffusie en straling.

In paragraaf 2 van deze notitie wordt de functie $F(T, T_0)$ bepaald als een functie van de toestandsvariabelen V, P en T , waarbij P de druk in de luchtbel voorstelt. In deze uitdrukking treden ook nog op de soortelijke warmten van lucht bij constante druk en constant volume C_p en C_v , alsmede de grootheden σ en K .

Met behulp van deze uitdrukking en experimentele gegevens betreffende het verloop van de druk, het volume en de temperatuur van de luchtbel tijdens de expansie in een windketel, kunnen numerieke waarden van de warmteoverdrachtsfunctie bepaald worden. Deze waarden hebben dan uiteraard alleen betrekking op de expansie van de lucht in deze speciale windketel. In paragraaf 3 zijn de berekeningen voor een bijzonder geval uitgevoerd.

§ 2. Afleiding van de warmteoverdrachtsfunctie

Vatten we de lucht op als een ideaal gas, waarvoor de wet van Boyle-Gay-Lussac geldt:

$$PV = RT, \quad (2.1)$$

waarbij de R de z.g. gasconstante is, dan geldt voor de warmteopname door een gram molecuul gas:

$$\frac{dQ}{dt} = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V \frac{dP}{dt} + \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P \frac{dV}{dt} = C_V \frac{V}{R} \frac{dP}{dt} + C_P \frac{P}{R} \frac{dV}{dt} \quad (2.2)$$

Bij een isentropisch proces spreekt men van adiabatische expansie. In dit geval geldt $dQ = 0$, zodat

$$0 = C_V \frac{V}{R} \frac{dP}{dt} + C_P \frac{P}{R} \frac{dV}{dt} \quad (2.3)$$

Hieruit volgt de differentiaalvergelijking

$$-\frac{P}{V} \left(\frac{dV/dt}{dP/dt} \right) = \frac{C_V}{C_P} = \frac{1}{\alpha_o} \quad (2.4)$$

waarin α_o de z.g. Poissonverhouding is.

De oplossing

$$PV^{\alpha_o} = C \quad (2.5)$$

staat bekend als de derde wet van Poisson. De Poissonverhouding α_o is gelijk aan 1,4 voor lucht.

Wordt de warmtetoevoer gegeven door (1.3), dan geldt volgens (2.2)

$$F(T, T_0) - \frac{d(KV\sigma)}{dt} = C_V \cdot \frac{V}{R} \cdot \frac{dP}{dt} + C_P \cdot \frac{P}{R} \cdot \frac{dV}{dt} \quad (2.6)$$

Omdat σ slechts van de temperatuur afhangt en K praktisch als constant genomen mag worden, kunnen we de vergelijking (2.6) herleiden tot:

$$\begin{aligned} F(T, T_0) - KV \frac{d\sigma}{dT} \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V \cdot \frac{dP}{dt} + \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P \frac{dV}{dt} \right\} - K\sigma \cdot \frac{dV}{dt} = \\ = C_V \cdot \frac{T}{P} \frac{dP}{dt} + C_P \cdot \frac{T}{V} \frac{dV}{dt} \end{aligned}$$

Met behulp van (2.1) vinden we dan tenslotte voor de warmteoverdrachtsfunctie de formule:

$$F(T, T_0) = \left\{ C_V \cdot \frac{T}{P} + \frac{KVT}{P} \frac{d\sigma}{dT} \right\} \frac{dP}{dt} + \left\{ C_P \cdot \frac{T}{V} + K\sigma + KT \frac{d\sigma}{dT} \right\} \frac{dV}{dt} \quad (2.7)$$

De term $K\sigma \frac{dV}{dt}$ mag eventueel weggelaten worden, omdat in ons geval $T \frac{d\sigma}{dT} \gg \sigma$ is (zie lit. 1). Met gebruik van deze vereenvoudiging volgt uit (2.7)

$$- \frac{P}{V} \left(\frac{dV/dt}{dP/dt} \right) = \frac{C_V + KV \frac{d\sigma}{dT} - F(T, T_0) \left(\frac{dP}{dt} \right)^{-1} \frac{P}{T}}{C_P + KV \frac{d\sigma}{dT}} \quad (2.8)$$

Deze differentiaalvergelijking is de generalisatie van de vergelijking (2.4).

Indien we nu stellen:

$$\alpha = \frac{C_P + KV \frac{d\sigma}{dT}}{C_V + KV \frac{d\sigma}{dT} - F(T, T_0) \left(\frac{dP}{dt} \right)^{-1} \frac{P}{T}} \quad (2.9)$$

dan is α op te vatten als een gegeneraliseerde Poissonverhouding. Oplossing van $F(T, T_0)$ uit deze uitdrukking geeft tenslotte voor de warmteoverdrachtsfunctie nog de formule:

$$F(T, T_0) = \frac{T \frac{dP}{dt}}{\alpha P} \left\{ \alpha \left(C_V + KV \frac{d\sigma}{dT} \right) - \left(C_P + KV \frac{d\sigma}{dT} \right) \right\} \quad (2.10)$$

§ 3. Numerieke waarden van de warmteoverdrachtsfunctie voor een speciaal geval

Uit de formules (2.1) en (2.7) volgt, dat men de warmteoverdrachtsfunctie $F(T, T_0)$ gedurende een expansieproces kan berekenen, indien men gedurende dit proces een P-V en een P-t diagram experimenteel bepaalt.

De term $K\sigma \frac{dV}{dt}$ wordt verwaarloosd, en de factor $K \frac{d\sigma}{dT}$ wordt ontleend aan de volgende tabel (zie lit. 1)

$T = 283^{\circ} \text{ K}$	$K \frac{d\sigma}{dT} = 0,341 \text{ [cal.liter}^{-1} \text{ graad}^{-1}\text{]}$
$T = 278^{\circ} \text{ K}$	$K \frac{d\sigma}{dT} = 0,275$
$T = 273^{\circ} \text{ K}$	$K \frac{d\sigma}{dT} = 0,207$

Uit deze gegevens volgt, dat $K \frac{d\sigma}{dT}$ als een lineaire functie van T beschouwd mag worden. Voor temperaturen lager dan 257° K speelt de waterdamp geen rol meer, hetgeen in overeenstemming is met de fysische ervaring.

De metingen zijn verricht aan een cilindervormige ketel met een diameter van 3 meter en een lengte van 20 meter. De ketel heeft een gebitumineerde stalen wand.

Omdat de experimenten moeilijk uit te voeren zijn, en de meetfouten vrij groot zijn, zijn 5 series metingen aan bovengenoemde windketel uitgevoerd waarbij de begindrukken, de beginvolumina van één grammo-lecuul en de begintemperaturen niet veel van elkaar verschillen. Deze variëren respectievelijk van 6.93 tot 7.06 atm., van 3.46 tot 3.52 liter en van 287° K tot 290° K .

Om de warmteoverdracht per oppervlakteenheid te berekenen is tevens de oppervlakte O van het oppervlak, dat de luchtbel omsluit, van belang.

De luchtbel wordt gedeeltelijk door water en gedeeltelijk door de stalen wand van de windketel begrensd. De oppervlakte van dit grensoppervlak volgt gemakkelijk uit het gemeten volume en de dimensies van de windketel.

Een karakteristieke tabel van de grootheden in (2.7), die voor verdere berekeningen van belang zijn, is gegeven in tabel I.

Substitutie van de waarden uit deze tabel, en de waarde van α die aan het P-V diagram ontleend wordt, geeft $F(T, T_0)$ op verschillende tijdstippen van de expansie. Voor de soortelijke warmten van lucht C_p en C_v zijn genomen de waarden $C_p = 7.50$ [cal. grammolecuul⁻¹ graad⁻¹] en $C_v = 5.36$ [cal. grammolecuul⁻¹ graad⁻¹] (zie lit. 2). De waarden die men voor $F(T, T_0)$ vindt, geven de gemiddelde warmte in calorieën, opgenomen per seconde door een grammolecuul lucht bij een temperatuursverschil $T_0 - T$ van wand en lucht. Er zij hier opgemerkt, dat T de gemiddelde temperatuur van het gas is.

Om de warmte te bepalen, die de lucht in de luchtbel gemiddeld opneemt per seconde, per graad temperatuursverschil en per vierkante meter van het omsluitend oppervlak, voeren we in de grootheid.

$$\Lambda = \frac{F(T, T_0) \cdot N}{0.01 (T_0 - T)} \quad (3.1)$$

waarin N het aantal grammoleculen is, dat in de luchtbel aanwezig is; dit getal is voor het geval corresponderend met tabel I.

$$N = \frac{V \text{ totaal}}{V \text{ grammolecuul}} = \frac{22800}{3.50} = 6514.$$

In tabel II zijn naast het oppervlak O gegeven de belangrijke grootheden α , $F(T, T_0)$ en Λ .

Aan dezelfde ketel is tevens een experiment uitgevoerd met begindruk 4.20 atm. beginvolume van een grammolecuul 5.63 liter en begintemperatuur 279° K. De resultaten van dit experiment zijn verwerkt in de tabellen III en IV.

Met behulp van de tabellen I en II resp. III en IV kan tenslotte een

grafiek gemaakt worden, die het verloop van Λ beschrijft als functie van het volume V van een grammolecuul lucht.

Tenslotte zij nog vermeld, dat uit de tabellen II en IV duidelijk blijkt, dat de waarden van α in de beginfase van de expansie beduidend van de waarde 1 verschillen.

Dit betekent, dat de expansie zeker niet isotherm te noemen is, een feit dat belangwekkend is, daar tot dusver de berekeningen aan het waterslagprobleem in het algemeen werden uitgevoerd met de veronderstelling, dat de expansie in de windketels wel ten naaste bij isotherm zou verlopen.

De metingen aan de bovengenoemde windketel en het grootste deel van de numerieke berekeningen, waarvan de resultaten in de tabellen I-IV zijn weergegeven, werden uitgevoerd door Ir.M.A.A.Soleman van de Gemeente Waterleidingen te Amsterdam.

Literatuur:

1. Landolt-Börnstein (W.A.Roth/K.Scheel).
Phys. Chem. Tabellen Band II 284, P.1323 (1923)
Ergänzungsband 330c, P. 863 (1923)
2. Landolt-Börnstein (W.A.Roth/K.Scheel).
Phys. Chem. Tabellen Band II 264, P. 1279 (1923).

T A B E L I

t(sec.)	P(atm.)	V(liter)	T($^{\circ}$ K)	$\frac{dP}{dt}$ (atm./sec.)	K $\frac{d\sigma}{dT}$ (cal./grol.graad)
0	6,98	3,50	288	0,133	0,408
5	6,28	3,81	282	0,122	0,328
15	5,24	4,40	272	0,070	0,194
25	4,53	4,96	265	0,052	0,090
35	4,03	5,46	260	0,040	0,033
45	3,61	5,95	254	0,032	0,000
55	3,28	6,45	250	0,026	0,000
65	3,01	6,94	246	0,021	0,000
75	2,80	7,37	244	0,016	0,000
90	2,56	8,05	243	0,012	0,000
100	2,44	8,46	244	0,010	0,000
120	2,23	9,29	245	0,007	0,000
200	1,77	12,10	252	0,004	0,000

T A B E L II

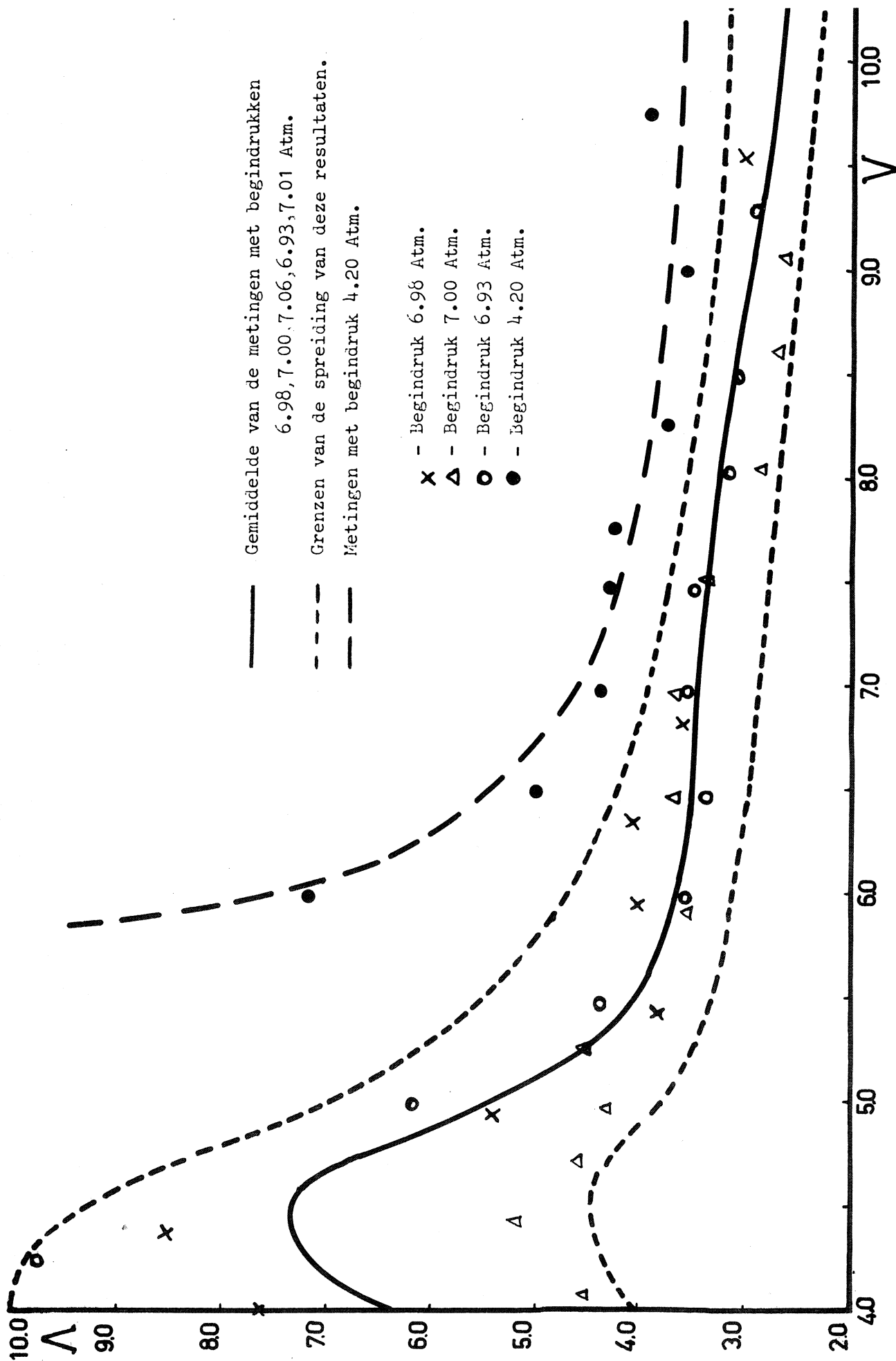
t(sec.)	$\sigma(m^2)$	α	F(cal./sec.grol.)	Λ (cal./sec.graad m^2)
0	107,5	1,36		
5	110,6	1,31	0,40	3,54
15	116,4	1,21	2,52	9,80
25	120,4	1,20	2,50	6,49
35	124,0	1,19	2,10	4,34
45	127,5	1,19	2,14	3,60
55	130,1	1,15	2,34	3,45
65	133,6	1,08	2,74	3,62
75	136,4	1,02	2,86	3,52
90	140,5	0,96	2,70	3,23
100	142,4	0,95	2,58	3,08
120	146,7	0,91	2,15	2,93
200	159,0	0,90		1,72

T A B E L III

t(sec.)	P(atm.)	V(liter)	T(°K)	$\frac{dP}{dt}$ (atm./sec.)	$K \frac{d\sigma}{dT}$ (cal./grol.graad)
0	4,20	5,63	279	0,043	0,287
10	3,82	6,06	274	0,035	0,220
20	3,50	6,49	268	0,026	0,140
30	3,26	6,95	266	0,022	0,113
40	3,04	7,35	264	0,020	0,086
50	2,84	7,87	261	0,018	0,042
60	2,67	8,18	258	0,015	0,006
80	2,40	8,95	254	0,011	0,000
100	2,22	9,74	255	0,008	0,000
130	2,01	10,87	258	0,006	0,000
200	1,71	12,98	262	0,003	0,000

T A B E L IV

t(sec.)	$O(m^2)$	α	$F(\frac{cal.}{sec.grol})$	$\Lambda(\frac{cal.}{sec.graad m^2})$
0	119,4	1,29		
10	122,8	1,26	0,80	7,31
20	125,0	1,22	1,27	5,19
30	127,8	1,21	1,29	4,35
40	130,0	1,19	1,51	4,32
50	132,3	1,15	1,85	4,30
60	134,5	1,12	1,90	3,75
80	138,5	1,02	2,25	3,64
100	142,0	0,95	2,40	4,02
130	147,0	0,93	2,06	3,71
200	155,4	0,88	1,49	3,07



De warmteoverdracht als functie van het volume van een grammelecuul lucht.